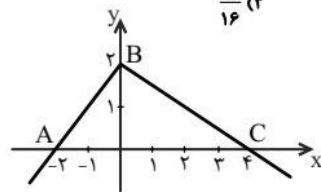


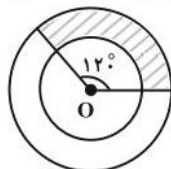
حسابان ۱

- ۱- در دنباله حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟
 (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۴
- ۲- اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 - \alpha + \beta$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ۴ (۴) -۲
- ۳- مجموع ریشه‌های معادله $\sqrt{x-2} + \frac{7}{\sqrt{x-2}+1} = 7$ کدام است؟
 (۱) ۴۲ (۲) ۸ (۳) ۳۹ (۴) ۱۹
- ۴- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ، ضابطه تابع f^{-1} برابر کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}), x \in \mathbb{R}$ (۲) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x} - x), x \in \mathbb{R}$ (۳) $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}), x > 0$ (۴) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x} - x), x > 0$
- ۵- دو تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ مفروض اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، مقدار a کدام است؟
 (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۴
- ۶- اگر $x = \alpha$ جواب معادله $\log(x-2) = 2 \log 2 - \log(x-4)$ ، حاصل $\log_8(\alpha - 3)$ کدام است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{2}$
- ۷- اگر $\tan 20^\circ = 0/36$ ، حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{8}$ (۳) $\frac{17}{8}$ (۴) $\frac{31}{16}$
- ۸- در شکل مقابل، $\sin(\widehat{ABC})$ چند برابر $\sqrt{10}$ است؟
 (۱) $0/2$ (۲) $0/3$ (۳) $0/4$ (۴) $0/5$
- ۹- اگر $f(x) = \frac{3x^2 - 10x + 8}{3x + 2}$ و $g(x) = \frac{3x - 4}{3x - 1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟
 (۱) -۲ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۳
- ۱۰- به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ پیوسته است؟
 (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار a



هندسه ۲

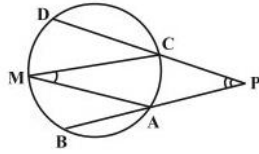
- ۱۱- مطابق شکل زیر دو دایره $C(O, r)$ و $C'(O, 2r)$ مفروض اند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر 25π باشد، آن گاه



مساحت دایره بزرگ‌تر کدام است؟

(۱) 75π (۲) 125π (۳) 100π (۴) 150π

۱۲- در شکل زیر امتداد وترهای AB و CD یکدیگر را در نقطه P قطع کرده‌اند. اگر M وسط کمان $\widehat{BD}$ و $\hat{P} + \hat{M} = 50^\circ$ باشد، در



این صورت زاویه BAM چند درجه است؟

(۱) ۵۰

(۲) ۳۰

(۳) ۲۵

(۴) ۱۵

۱۳- مطابق شکل زیر، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۸ مماس برون هستند و بر اضلاع مستطیل نیز مماس هستند. محیط مستطیل کدام



است؟

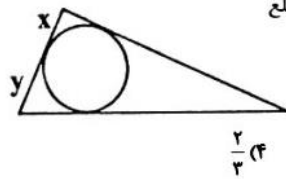
(۲) ۶۸

(۱) ۷۲

(۴) ۶۴

(۳) ۵۶

۱۴- دایره محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳، ۹ و ۸، در نقطه تماس، کوچک‌ترین ضلع



را به ۲ قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{3}{7}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) $\frac{1}{3}$

۱۵- در یک دوزنقه محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط دوزنقه، کدام است؟

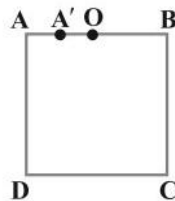
(۴) ۴۸

(۳) ۴۶

(۲) ۴۴

(۱) ۳۶

۱۶- در شکل زیر، طول ضلع مربع $\sqrt{5}$ و $OA' = AA' = \frac{AB}{4}$ است. اگر نقطه A' تصویر نقطه A در یک تجانس به مرکز O باشد،



فاصله نقطه C از تصویر خود در این تجانس برابر با کدام است؟

(۲) $\frac{5}{3}$

(۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(۴) $\frac{5}{4}$

(۳) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

۱۷- دو نقطه A و B به فاصله‌های ۲ و ۳ واحد از خط d و در یک طرف آن واقع‌اند. می‌خواهیم از نقطه A به نقطه‌ای روی خط d

رفته و از آن جا به نقطه B برویم. در صورتی که فاصله تصویر این دو نقطه روی خط d برابر ۱۲ واحد باشد، آن‌گاه طول

کوتاه‌ترین مسیر ممکن کدام است؟

(۴) ۱۶

(۳) ۱۵

(۲) ۱۴

(۱) ۱۳

۱۸- دو قایق از یک نقطه در دریاچه، با سرعت‌های $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ و $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ و با زاویه 120° از هم دور می‌شوند. بعد از نیم ساعت، دو قایق

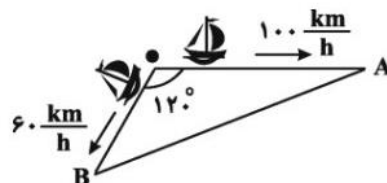
چند کیلومتر از هم فاصله دارند؟

(۱) ۷۰

(۲) $25\sqrt{2}$

(۳) $25\sqrt{3}$

(۴) ۶۰



۱۹- در مثلث قائم‌الزاویه ABC، زاویه $A = 90^\circ$ و اندازه اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. ارتفاع AH و نیمساز AD رسم شده است.

اندازه DH کدام است؟

(۴) $\frac{16}{25}$

(۳) $\frac{12}{25}$

(۲) $\frac{9}{25}$

(۱) $\frac{8}{25}$

۲۰- سه دایره به شعاع‌های ۲، ۳ و ۴ دایره دو مماس خارج‌اند. اندازه مساحت مثلثی که از وصل کردن مرکز دایره‌ها به وجود می‌آید،

کدام است؟

۶√۶ (۲)

۴√۶ (۱)

۱۲√۶ (۴)

۸√۶ (۳)

امار و احتمال

۲۱- گزاره $(p \wedge r) \Rightarrow (p \vee \sim q)$ ، با کدام گزاره زیر هم‌ارزش است؟

$p \wedge (q \vee r)$ (۲)

$p \vee (q \wedge r)$ (۱)

$r \Rightarrow (p \vee q)$ (۴)

$r \Rightarrow (p \wedge q)$ (۳)

۲۲- مجموعه A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه و مجموعه $A \cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $(B \cup A)'$ کدام است؟

۶۴ (۴)

۴۸ (۳)

۳۲ (۲)

۱۶ (۱)

۲۳- یکی از افزایندهای مجموعه A به صورت $\{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}, \{c\}\}$ است. تعداد افزایندهای مجموعه A که فاقد مجموعه تک‌عضوی

باشند، کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۲۴- اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، مجموعه $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$ همواره برابر با کدام مجموعه است؟

$(A - B)'$ (۲)

$A' - B'$ (۱)

$\emptyset$ (۴)

A' (۳)

۲۵- تعداد مسافریں در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آنان تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجریں، برای

اولین بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه برای اولین بار

سفر کرده است؟

$\frac{5}{9}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{5}{8}$ (۳)

۲۶- امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ در یک مسابقه علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط

شرکت بهروز برابر $\frac{1}{5}$ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز کدام است؟

$\frac{5}{7}$ (۲)

$\frac{9}{14}$ (۱)

$\frac{6}{7}$ (۴)

$\frac{11}{14}$ (۳)

۲۷- اگر دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگر، $P(A|B) = \frac{2}{3}$ و $P(A - B) = \frac{1}{4}$ باشند، حاصل $P(B - A)$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{5}{24}$ (۱)

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{7}{24}$ (۳)

۲۸- نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است. مقدار $\frac{Q_1 + Q_2 - 2Q_3}{Q_3 - Q_1}$ کدام است؟

۱۲/۷، ۳۰/۲، ۱۰/۶، ۱۱/۹، ۱۰/۶، ۱۲/۳، ۱۱/۲، ۱۳/۵، ۱۲/۸، ۱۱/۵

(۱) -۰/۲۲۵

(۲) -۰/۱۲۵

(۳) ۰/۱۲۵

(۴) ۰/۲۲۵

۲۹- انحراف معیار ۲۶ داده آماری برابر ۲ است. اگر یکی از داده‌ها که با میانگین برابر است، از بین آنها حذف شود، واریانس ۲۵

داده دیگر کدام است؟

(۲) ۴/۰۸

(۱) ۳/۹۶

(۴) ۴/۱۶

(۳) ۴/۱۲

۳۰- از اعداد صحیح ۰ تا N، پنج عدد ۸ و ۵ و ۲ و ۶ و ۴ به تصادف انتخاب شده‌اند. برآورد نقطه‌ای از N به کمک پارامتر

میانگین کدام است؟

(۲) ۸

(۱) ۵

(۴) ۱۲

(۳) ۱۰

فیزیک ۲

۳۱- نیرویی که بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 به بار الکتریکی نقطه‌ای q_2 که در فاصله d از آن قرار دارد، وارد می‌کند، در SI

به صورت $\vec{F}_{12} = \vec{r}_{12} - \vec{j}$ است. اگر بارهای q_1 و q_2 نصف و فاصله بین دو بار $\frac{rd}{4}$ شود، نیروی وارد بر بار q_1 برحسب بردارهای یک

در SI کدام است؟

(۴) $\frac{1}{9}(-2\vec{i} + \vec{j})$

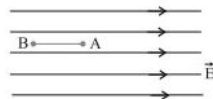
(۳) $\frac{1}{9}(\vec{r}_{12} - \vec{j})$

(۲) $\frac{9}{16}(-2\vec{i} + \vec{j})$

(۱) $\frac{9}{16}(\vec{r}_{12} - \vec{j})$

۳۲- بار الکتریکی $q = -4\mu C$ مطابق شکل در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $10^5 V/m$ رها می‌شود. در جابه‌جایی بار q از

نقطه A تا B انرژی جنبشی بار ۸ میلی‌ژول افزایش می‌یابد. $V_B - V_A$ چند کیلوولت است؟



(۱) ۲

(۲) -۲

(۳) ۲۰۰

(۴) -۲۰۰

۳۳- انرژی خازنی که به یک مولد متصل است برابر U است. در این حالت ابتدا فاصله بین دو صفحه خازن را سه برابر نموده و سپس

خازن را از مولد جدا می‌کنیم و دی‌الکتریک با ثابت ۲ بین صفحات آن قرار می‌دهیم. در این حالت انرژی خازن چند U

می‌شود؟

(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{6}$

(۲) ۳

(۱) ۶

۳۴- دو سیم هم‌طول مسی و آلومینیمی، در یک دمای معین، دارای مقاومت الکتریکی مساوی‌اند. اگر چگالی مس و آلومینیم

به ترتیب $9 g/cm^3$ و $2.7 g/cm^3$ و مقاومت ویژه مس $\frac{1}{4}$ مقاومت ویژه آلومینیم باشد، جرم سیم آلومینیمی چند برابر جرم سیم

مسی است؟

(۴) $\frac{5}{3}$

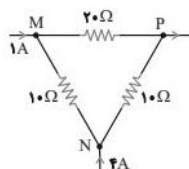
(۳) $\frac{5}{4}$

(۲) $\frac{4}{5}$

(۱) $\frac{3}{5}$

۳۵- شکل زیر، قسمتی از یک مدار الکتریکی است. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه P و N چند برابر اختلاف پتانسیل بین دو نقطه

M و N است؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۶

(۴) ۷

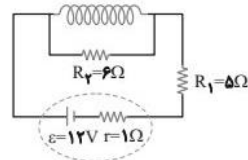
۳۶- اگر ۳ مقاومت الکتریکی مشابه را به طور متوالی به هم ببندیم و دو سر مجموعه را به اختلاف پتانسیل ثابت وصل کنیم، توان مصرفی کل مدار ۹۰ وات می شود. اگر همان مقاومت ها را به طوری موازی به همان اختلاف پتانسیل وصل کنیم، توان کل مدار چند وات می شود؟

- ۳۰ (۱) ۲۷۰ (۲) ۵۶۰ (۳) ۸۱۰ (۴)

۳۷- سیمی در میدان مغناطیسی $\vec{B} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ تسلا قرار دارد. اگر از سیم، جریان ۵ آمپر در سوی محور x عبور کند، اندازه نیروی وارد بر ۱۰ سانتی متر آن چند نیوتون خواهد بود؟

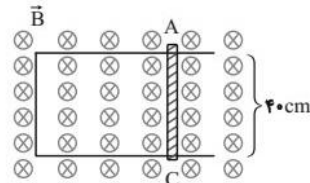
- ۰/۴ (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۲/۵ (۴)

۳۸- در مدار شکل زیر مقاومت سیملوله ناچیز است. اگر طول سیملوله ۱۰ cm و تعداد دورهای آن ۵۰۰ باشد، بزرگی میدان مغناطیسی روی محور اصلی آن چند گاوس است؟ ($\pi \approx 3, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T.m/A}$)



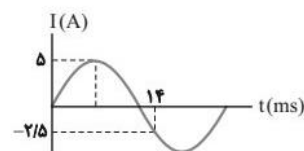
- ۱۲ (۱)
۶ (۲)
۱۲۰ (۳)
۶۰ (۴)

۳۹- در شکل زیر، سطح رسانای U شکلی عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواخت و درون سوی $\vec{B}$ به بزرگی ۵۰۰۰ G قرار دارد. میله فلزی AC را با سرعت ۴ m/s به سمت راست حرکت می دهیم. اگر جریان عبوری از این میله ۲ A باشد، مقاومت الکتریکی مدار ایجاد شده چند اهم است؟



- ۰/۴ (۱)
 4×10^2 (۲)
۴۰ (۳)
۴ (۴)

۴۰- نمودار جریان عبوری از یک القاگر بر حسب زمان مطابق شکل زیر است. اگر ضریب القاوری آن ۱۲ هنری باشد، انرژی ذخیره شده در القاگر در لحظه $t = 3 \text{ ms}$ چند ژول است؟



- ۷۵ (۱)
۳۰ (۲)
۵۰ (۳)
۱۰۰ (۴)

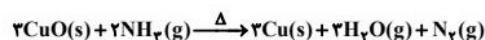
شیمی ۲

۴۱- چند مورد جمله ی زیر را به طور صحیح کامل می کند؟

«عنصر رسانایی الکتریکی دارد، در واکنش با دیگر اتم ها، الکترون و در اثر ضربه»
(ا) با عدد اتمی ۵۰ - بالایی - از دست می دهد - خرد نمی شود.
(ب) دوره سوم جدول تناوبی با ۶ الکترون در لایه ظرفیت - بالایی - به اشتراک می گذارد یا می گیرد - خرد می شود.
(ج) پنجم گروه چهاردهم جدول تناوبی عناصر - بالایی - از دست می دهد - خرد می شود.
(د) با عدد اتمی ۱۱ - پایینی - از دست می دهد - خرد نمی شود.

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۲- مطابق واکنش زیر، در دمای بالا، گاز آمونیاک با مس (II) اکسید واکنش می دهد، اگر این واکنش با بازده ۶۰ درصد انجام شود، برای تهیه ۷/۶۸ گرم فلز مس، چند گرم CuO با خلوص ۸۰٪ با مقدار کافی آمونیاک واکنش می دهد؟ ($\text{Cu} = 64, \text{O} = 16 : \text{g.mol}^{-1}$)

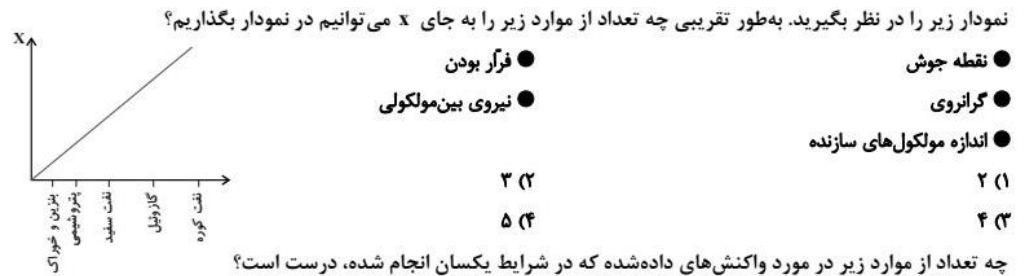


- ۲۰ (۱) ۱۲/۸ (۲) ۱۵ (۳) ۷/۲ (۴)

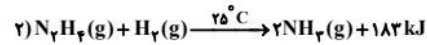
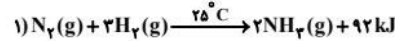
۴۳- نام هیدروکربنی با فرمول $\text{CH}_3 - \text{C}(\text{CH}_3)_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{C}(\text{CH}_3)_3$ ، کدام است؟

- ۱) ۲، ۲، ۶، ۷- پنتا متیل اوکتان
۲) ۳، ۲، ۲، ۷- پنتا متیل اوکتان
۳) ۲- پروپیل، ۲، ۶- تری متیل هپتان
۴) ۶- پروپیل، ۲، ۲، ۶- تری متیل هپتان

- ۴۴



- ۴۵



تفاوت انرژی پتانسیل در واکنش دهنده ها و فراورده های واکنش (۲) بیشتر از واکنش (۱) است.

در هر دو واکنش، انرژی پتانسیل واکنش دهنده ها بالاتر از فراورده ها می باشد.

در واکنش (۱)، ΔH محیط پیرامون واکنش بیشتر از واکنش (۲) می باشد.

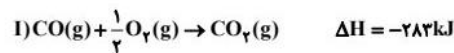
واکنش دهنده ها در واکنش (۱)، ناپایدارتر از واکنش دهنده ها در واکنش (۲) می باشد.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

- ۴۶

با توجه به واکنش های زیر، اگر متوسط آنتالپی پیوندهای $N \equiv N$ ، $C \equiv O$ و $N = O$ به ترتیب برابر با ۹۴۴، ۱۰۷۵ و ۶۰۷ کیلوژول بر مول باشد،

میانگین آنتالپی پیوند $C = O$ در کربن دی اکسید در واکنش $CO(g) + NO(g) \rightarrow CO_2(g) + \frac{1}{2}N_2(g)$ تقریباً چند $kJ \cdot mol^{-1}$ است؟

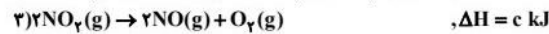
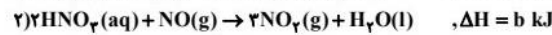
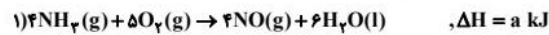


۱۵۸۳ (۴) ۸۳۷ (۳) ۳۹۵/۷۵ (۲) ۷۹۱/۵ (۱)

- ۴۷

نیتریک اسید به صورت صنعتی از اکسایش آمونیاک تهیه می شود. مقدار گرمای مبادله شده با یکای kJ برای تهیه ی هر مول

نیتریک اسید با استفاده از واکنش: $NH_3(g) + 2O_2(g) \rightarrow HNO_3(aq) + H_2O(l)$ ، کدام است؟



$\frac{a-2b-3c}{4}$ (۴) $\frac{-a+b+3c}{4}$ (۳) $\frac{a+2b+3c}{2}$ (۲) $\frac{a-b-3c}{2}$ (۱)

- ۴۸

واکنش مقابل را در نظر بگیرید:

با توجه به جدول زیر، کدام عبارت در مورد آن درست است؟

زمان (s)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
غلظت اوزون ($mol \cdot L^{-1}$)	$3/2 \times 10^{-5}$	$2/42 \times 10^{-5}$	$1/95 \times 10^{-5}$	$1/63 \times 10^{-5}$	$1/4 \times 10^{-5}$	$1/23 \times 10^{-5}$	$1/1 \times 10^{-5}$

۱) در یک دقیقه اول واکنش، غلظت اوزون به طور متوسط در هر ثانیه $3/5 \times 10^{-6} mol \cdot L^{-1}$ کاهش می یابد.

۲) سرعت متوسط تولید گاز O_2 می دارد که غلظت اکسیژن در هر لحظه چقدر سریع افزایش می یابد.

۳) سرعت متوسط مصرف اتن با گذشت زمان کاهش و سرعت متوسط تولید گاز C_2H_4O با گذشت زمان افزایش می یابد.

۴) سرعت متوسط مصرف اوزون در بازه ی زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه ۶ برابر سرعت متوسط مصرف اوزون در بازه ی زمانی ۵۰ تا ۶۰ ثانیه است.

- ۴۹

چند مورد از مطالب زیر درباره ی پلیمرهای نشان داده شده درست است؟

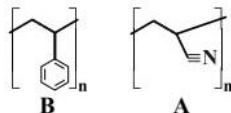
- پلیمر A در ساخت پتو و پلیمر B در ساخت کیسه ی خون کاربرد دارد.

- مونومر هر دو آن ها سیر نشده هستند.

- مونومر سازنده A پروپن و B استیرن است.

- همه اتم ها در ساختار این دو پلیمر به آرایش هشت تایی نرسیده اند.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



- ۵۰

ساختار ویتامین D به صورت زیر است، چند مورد از مطالب زیر در

مورد آن درست است؟

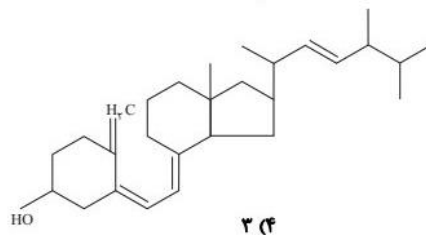
۱) فرمول مولکولی آن $C_{28}H_{44}O$ است.

۲) با جذب ۴ مولکول هیدروژن به ترکیب سیر شده تبدیل می شود.

۳) مصرف زیاد آن برای بدن ضرر ندارد.

۴) گروه عاملی موجود در آن در ویتامین K هم وجود دارد.

۱) صفر



گزینه ۲ - ۱

دنباله داده شده یک دنباله حسابی با جمله اول ۵ و

قدرنسبت $d = 8 - 5 = 3$ است که باید در آن $S_n > 500$ شود بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2(5) + (n-1)(3))$$

$$= \frac{3n^2 + 7n}{2} > 500$$

$$\Rightarrow 3n^2 + 7n - 1000 > 0 \Rightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{12049}}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \approx 17/13 \\ n \approx -19/46 \end{cases} \quad \text{غلق}$$

بنابراین نامساوی فوق به ازای $n > 17/13$ برقرار است یعنی باید حداقل

۱۸ جمله از دنباله فوق را با هم جمع کنیم که بزرگتر از ۵۰۰ شود.

گزینه ۳ - ۲

ریشه‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha + \beta = 2\alpha + 2 - \alpha + \beta = \underbrace{\alpha + \beta + 2}_S$$

$$\xrightarrow{S = \frac{-b}{a} = 2} \alpha + \beta + 2 = 2 + 2 = 4$$

گزینه ۱ - ۳

$$\sqrt{x-3} + 1 + \frac{y}{\sqrt{x-3} + 1} = y + 1$$

با تغییر متغیر $t = \sqrt{x-3} + 1$ داریم:

$$t + \frac{y}{t} = 8 \Rightarrow t^2 - 8t + y = 0 \Rightarrow (t-1)(t-7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \sqrt{x-3} + 1 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ t = 7 \Rightarrow \sqrt{x-3} + 1 = 7 \Rightarrow x - 3 = 36 \Rightarrow x = 39 \end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها $= 3 + 39 = 42$

گزینه ۳ - ۴

دامنه تابع f ، بازه $D_f = \mathbb{R}$ است، برد تابع را می‌یابیم:

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \geq -x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

لذا برد تابع، بازه $R_f = (0, +\infty)$ است، پس دامنه تابع f^{-1} ، $x > 0$ است.

$$y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow (y-x)^2 = x^2+1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y^2-1}{2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right), \quad x > 0$$

گزینه ۱ - ۵

$$g^{-1}(f(a)) = 3 \xrightarrow{\text{از طرفین } g \text{ می‌گیریم}} f(a) = g(3) = -2$$

$$\Rightarrow f(a) = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(a) = \begin{cases} \sqrt{a} & ; a \geq 0 \\ -\sqrt{-a} & ; a < 0 \end{cases}$$

$$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \neq -2$$

$$a < 0 \Rightarrow -\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow a = -4$$

گزینه ۴ - ۶

توجه کنید که دامنه این معادله $D = (4, +\infty)$ است.

$$\log(x-2) = 2\log 2 - \log(x-4)$$

$$\Rightarrow \log(x-2) + \log(x-4) = 2\log 2$$

$$\Rightarrow \log(x^2 - 6x + 8) = \log 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ x = 2 - \sqrt{5} \end{cases} \xrightarrow{\alpha > 4} \alpha = 2 + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \log_{\delta} \alpha^{-2} = \log_{\delta} \sqrt{5} = \log_{\delta} \delta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

یادآور می‌شویم وقتی مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ داشته باشیم، سینوس به کسینوس و به عکس تبدیل می‌شوند، در بقیه موارد فقط به علامت نسبت در ناحیه توجه می‌کنیم. بنابراین:

$$\frac{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)}$$

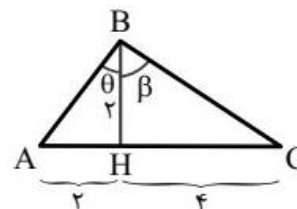
$$= \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}$$

از $\cos 20^\circ$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{\cos 20^\circ \left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 1 \right)}{\cos 20^\circ \left(-\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 1 \right)} = \frac{\tan 20^\circ + 1}{-\tan 20^\circ + 1}$$

$$= \frac{0/36 + 1}{-0/36 + 1} = \frac{100}{64} = \frac{17}{8}$$

می‌توانیم مثلث زیر را در نظر بگیریم:



در این مثلث $\angle ABC = \theta + \beta$ ، باید $\sin(\theta + \beta)$ را بیابیم. برای این منظور در مثلث قائم‌الزاویه AHB داریم:

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow 2^2 + 2^2 = AB^2 \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و در مثلث قائم‌الزاویه CHB داریم:

$$CH^2 + BH^2 = BC^2 \Rightarrow 4^2 + 2^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}$$

$$\sin \beta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \beta = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta + \beta) = \sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{3}{10} \sqrt{10}$$

در نتیجه $\sin(\widehat{ABC})$ ، $3/10$ برابر $\sqrt{10}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{3x^2 - 10x + 8}{3x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{(3x - 1)(3x^2 - 10x + 8)}{(3x + 2)(3x - 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{(3x - 1)(3x - 4)(x - 2)}{(3x + 2)(3x - 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{(3x - 1)(x - 2)}{3x + 2} = \frac{(4 - 1)(\frac{4}{3} - 2)}{4 + 2} = -\frac{1}{3}$$

برای آنکه تابع f در نقطه‌ای پیوسته باشد، باید حد و مقدار آن در این نقطه موجود و با هم برابر باشند. با توجه به ضابطه تابع f داریم $f(0) = a$ ، اما:

حد ابهام $\frac{0}{0}$ دارد. با انتخاب $\sqrt{\cos x} = t$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، $t \rightarrow 1$ و با توجه

به اتحاد $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos^2 x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - t}{1 - t^4}$$

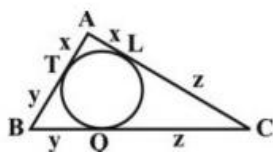
$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t - 1)}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{t + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2} = a$$

بنابراین

گزینه «۱» -۱۴

در مثلث ABC زیر، اندازه اضلاع را به صورت زیر در نظر می گیریم:



$$AB = 8 \text{ و } AC = 9 \text{ و } BC = 13$$

می دانیم که از هر نقطه خارج یک دایره، می توان دو مماس با طول برابر بر آن دایره رسم کرد. پس با توجه به شکل داریم:

$$AT = AL = x \text{ و } BT = BQ = y \text{ و } CL = CQ = z \quad (*)$$

اگر P را نصف محیط مثلث در نظر بگیریم، برای محیط مثلث نتیجه زیر را می توان نوشت:

$$P = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{8 + 9 + 13}{2} = 15$$

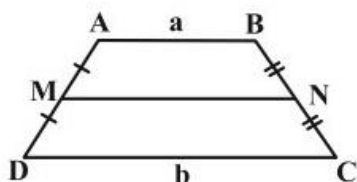
برای به دست آوردن مقادیر x و y به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{cases} x = P - (y + z) = P - BC = 15 - 13 = 2 \\ y = P - (x + z) = P - AC = 15 - 9 = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گزینه «۴» -۱۵

طول پاره خطی که وسط های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می کند، میانگین طول دو قاعده ذوزنقه است. یعنی در شکل زیر:

$$MN = \frac{a + b}{2}$$



طبق فرض:

$$MN = 12 \Rightarrow \frac{a + b}{2} = 12 \Rightarrow a + b = 24 \quad (*)$$

اما طبق فرض سؤال ذوزنقه ABCD محیطی است، می دانیم که در هر چهارضلعی محیطی مجموع ضلع های روبه رو با هم برابر است، یعنی در ذوزنقه محیطی ABCD داریم: $AB + CD = AD + BC$. پس:

$$ABCD \text{ محیط} = AB + CD + AD + BC$$

$$= AB + CD + AB + CD$$

$$= a + b + a + b = 2(a + b)$$

$$\xrightarrow{(*)} ABCD \text{ محیط} = 2 \times 24 = 48$$

گزینه «۳» -۱۱

می دانیم مساحت قطاعی از دایره به شعاع r و با زاویه مرکزی α از رابطه

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$

به دست می آید. اگر مساحت قطاع 120° در دایره های بزرگ و

کوچک را به ترتیب با S_1 و S_2 نمایش دهیم، داریم:

$$S_{\text{هاشورزده}} = S_1 - S_2$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشورزده}} = \frac{\pi (2r)^2 (120^\circ)}{360^\circ} - \frac{\pi r^2 (120^\circ)}{360^\circ} = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \pi r^2 = 25\pi \Rightarrow r = 5$$

$$S_{\text{دایره بزرگ}} = \pi (2r)^2 = 4r^2\pi = 100\pi$$

گزینه «۳» -۱۲

$$\left. \begin{aligned} \hat{P} &= \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \\ \hat{M} &= \frac{\widehat{AC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{P} + \hat{M} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{2\widehat{MB}}{2} = \widehat{MB}$$

$$\Rightarrow \widehat{MB} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} = \frac{\widehat{MB}}{2} = 25^\circ$$

گزینه «۲» -۱۳

اگر $R = 2$ و $R' = 8$ شعاع های دو دایره باشند، آن گاه چون EF مماس

مشترک خارجی دو دایره است، داریم:

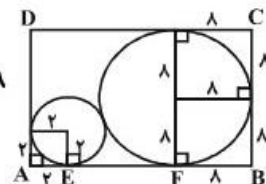
$$EF = 2\sqrt{RR'}$$

$$AB = AE + EF + BF = 2 + 2\sqrt{2 \times 8} + 8$$

$$\Rightarrow AB = 2 + 8 + 8 = 18$$

$$BC = 8 + 8 = 16$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2(18 + 16) = 2 \times 34 = 68$$



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2500 + 900 - 2 \times 50 \times 30 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4900$$

$$\Rightarrow AB = 70 \text{ km}$$

۱۹ - گزینه «۳»

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

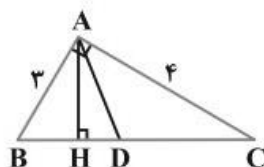
$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

از طرفی طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{\underbrace{BD+DC}_{BC}} = \frac{3}{4+3}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$$

$$DH = BD - BH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{75 - 63}{35} = \frac{12}{35}$$



۲۰ - گزینه «۲»

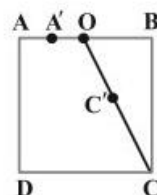
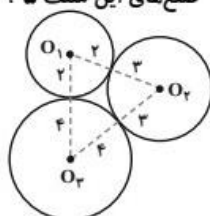
خواسته مسئله محاسبه اندازه مساحت مثلث $O_1O_2O_3$ است. اندازه

ضلع‌های این مثلث ۵، ۶ و ۷ است. طبق قضیه هرون داریم:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$= \sqrt{9 \times (9-5) \times (9-6) \times (9-7)} = 6\sqrt{6}$$



در این تجانس، نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ است. یعنی:

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2}$$

بنابراین، نقطه C' ، تصویر نقطه C ، وسط OC واقع است. یعنی:

$$OC' = CC' = \frac{OC}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه OBC داریم:

$$\hat{B} = 90^\circ, BC = \sqrt{5}, OB = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow OC^2 = OB^2 + BC^2 = \frac{5}{4} + 5 = \frac{25}{4}$$

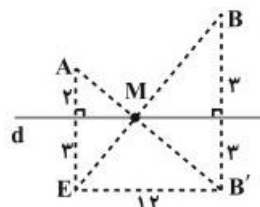
$$\Rightarrow OC = \frac{5}{2} \Rightarrow CC' = \frac{5}{4}$$

۱۷ - گزینه «۱»

اگر B' بازتاب B نسبت به خط d باشد، آنگاه نقطه M از برخورد AB'

با خط d به دست می‌آید با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه

AEB' داریم:



$$AB'^2 = AE^2 + EB'^2 \Rightarrow AB'^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow AB' = 13$$

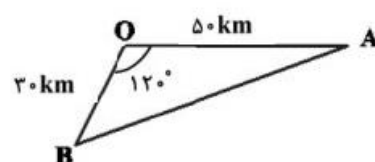
$$\Rightarrow AM + MB = AM + MB' = AB' = 13$$

۱۸ - گزینه «۱»

ابتدا مسافت طی شده، توسط هر قایق را محاسبه می‌کنیم:

$$OA = 100 \times 0.5 = 50 \text{ km}, OB = 60 \times 0.5 = 30 \text{ km}$$

حال به کمک قضیه کسینوس‌ها داریم:



اگر پیشامدهای «تاجر بودن» و «برای اولین بار سفر کردن» را به ترتیب با

A و B نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$n(S) = 72$$

$$n(A) = 23, n(B) = 12, n(A \cap B) = 8$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{23}{72} + \frac{12}{72} - \frac{8}{72} = \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

۲۶ - گزینه «۱»

اگر احتمال شرکت امیر و بهروز در مسابقه علمی را به ترتیب با A و B

نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.3$$

$$P(A|B) = 0.5 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.5$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.5 \times 0.3 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.15$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.6 - 0.15}{1 - 0.3}$$

$$P(A|B') = \frac{0.45}{0.7} = \frac{9}{14}$$

۲۱ - گزینه «۲»

طبق قوانین جبر گزاره‌ها داریم:

$$(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r) \equiv \sim(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$$

۲۲ - گزینه «۴»

تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه A، برابر $2^9 = 512$ است، پس

$n(A) = 9$ بوده و داریم:

$$n((B \cup A')') = n(A \cap B') = n(A - B)$$

$$= n(A) - n(A \cap B) = 9 - 3 = 6$$

در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر $2^6 = 64$ است.

۲۳ - گزینه «۲»

با توجه به افراز داده شده، مجموعه A دارای ۴ عضو است. افرازهای مورد

نظر به یکی از دو صورت زیر هستند:



$$\text{تعداد افرازا} = \binom{4}{4} + \frac{\binom{4}{2}}{2!} = 1 + 3 = 4$$

۲۴ - گزینه «۱»

$$\underbrace{[A \cup (A \cap B)]'}_{\text{قانون جذب}} \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$$

$$= A' \cap [(B \cap A) \cup (B \cap A')] = A' \cap [B \cap \underbrace{(A \cup A')}_U]$$

$$= A' \cap \underbrace{[B \cap U]}_B = A' \cap B = A' - B'$$

چون دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس $P(A|B) = P(A)$

و داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A)P(B')$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \times P(B') \Rightarrow P(B') = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

$$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B)P(A')$$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

$$10/6, 10/6, 11/2, 11/5, 11/9, 12/3, 12/7, 12/8, 13/5, 20/2$$

تعداد داده‌ها زوج است، پس میانگین دو داده وسط (داده‌های پنجم و ششم) همان میانه داده‌ها است:

$$Q_2 = \frac{11/9 + 12/3}{2} = 12/1$$

میانه ۵ داده اول (داده سوم) برابر چارک اول و میانه ۵ داده آخر (داده هشتم) برابر

چارک سوم است، پس $Q_1 = 11/2$ و $Q_3 = 12/8$ بوده و در نتیجه داریم:

$$\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{11/2 + 12/8 - 2 \times 12/1}{12/8 - 11/2} = \frac{-0/2}{1/6} = -0/125$$

می‌دانیم انحراف معیار جذر واریانس است، پس:

$$\sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{26} (x_i - \bar{x})^2}{26}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{26} - \bar{x})^2}{26}$$

$$\Rightarrow (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{26} - \bar{x})^2 = 104$$

اگر داده‌ای که برابر میانگین است را حذف کنیم یعنی $(\bar{x} - \bar{x})^2$ را در

رابطه بالا حذف کرده‌ایم که تغییری در مقدار آن ایجاد نمی‌کند. بنابراین:

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{25} - \bar{x})^2 = 104$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{25} = \frac{104}{25} = 4/16$$

می‌دانیم که پارامتر میانگین جامعه برابر است با:

$$\mu = \frac{0+1+2+\dots+N}{N+1} = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N+1} = \frac{N}{2}$$

حال با توجه به نمونه موجود مقدار آماره برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{4+6+2+5+8}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

برآورد نقطه‌ای ما از پارامتر جامعه یعنی $\frac{N}{2}$ ، برابر است با مقدار آماره نمونه یعنی

۵، پس برآورد ما از N برابر است با:

$$N = 10$$

ابتدا حالت اول که خازن به مولد متصل است را بررسی می‌کنیم. در این حالت اختلاف پتانسیل ثابت است، اما با سه برابر کردن فاصله بین صفحه‌های خازن، بنابه رابطه $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ ، ظرفیت خازن $\frac{1}{3}$ برابر و طبق رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ ، انرژی آن نیز $\frac{1}{3}$ برابر می‌گردد. به محاسبات توجه کنید.

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{A_2=A_1, d_2=3d_1}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = 1 \times \frac{d_1}{3d_1} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3} C_1$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \xrightarrow{V=\text{ثابت}} \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} \xrightarrow{\frac{C_2}{C_1}=\frac{1}{3}} \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow U_2 = \frac{1}{3} U$$

اکنون حالت دوم که خازن از مولد جدا می‌شود را بررسی می‌کنیم. در این حالت بار الکتریکی خازن ثابت می‌ماند، اما با وارد کردن دی‌الکتریک با ثابت ۲، ظرفیت آن بنابه رابطه $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ دو برابر و انرژی آن بنابه رابطه $U = \frac{Q^2}{2C}$ ، $\frac{1}{2}$ برابر حالت دوم و $\frac{1}{6}$ برابر حالت اول می‌شود. به محاسبات زیر توجه کنید.

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} \xrightarrow{A_2=A_1, \kappa_2=2, d_2=d_1, \kappa_1=1}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = 2 \times 1 \times 1 \Rightarrow C_2 = 2C_1$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} \xrightarrow{Q=\text{ثابت}} \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_2} \xrightarrow{C_2=2C_1}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{2C_1} \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2} U_1 \xrightarrow{U_1=\frac{1}{3}U} U_2 = \frac{1}{6} U$$

۳۴ - گزینه «۱»

با توجه به اینکه مقاومت الکتریکی سیم‌ها برابر است، با توجه به معلومات سوال داریم:

$$R_{Al} = R_{Cu} \Rightarrow (\rho \frac{L}{A})_{Al} = (\rho \frac{L}{A})_{Cu}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{Al}}{A_{Al}} = \frac{\rho_{Cu}}{A_{Cu}} \Rightarrow A_{Al} = 2 A_{Cu}$$

از طرفی برای مقایسه جرم سیم‌ها داریم:

$$\frac{m_{Al}}{m_{Cu}} = \frac{(\rho \times A \times L)_{Al}}{(\rho \times A \times L)_{Cu}} \Rightarrow \frac{m_{Al}}{m_{Cu}} = \frac{2/7}{9} \times 2 = \frac{2}{5}$$

۳۱ - گزینه «۴»

با توجه به رابطه مقایسه‌ای قانون کولن، داریم:

$$\frac{F'}{F} = \frac{|q'_1|}{|q_1|} \times \frac{|q'_2|}{|q_2|} \times \left(\frac{d}{d'}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{|q_1|}{2} \times \frac{|q_2|}{2} \times \left(\frac{d}{\frac{2}{3}d}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{1}{9}$$

طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که بارهای الکتریکی به هم وارد می‌کنند، نیروهای عمل و عکس‌العمل هستند که هم‌اندازه بوده ولی در خلاف جهت یکدیگرند. بنابراین نیرویی که بر بار q_1 وارد می‌شود، برابر است با:

$$\vec{F}'_{11} = -\vec{F}'_{12} \Rightarrow \vec{F}'_{11} = \frac{1}{9}(-1)(2\vec{i} - \vec{j}) = \frac{1}{9}(-2\vec{i} + \vec{j})$$

۳۲ - گزینه «۱»

چون انرژی جنبشی بار الکتریکی افزایش یافته است، باید انرژی پتانسیل آن کاهش یابد. بنابراین انرژی پتانسیل بار الکتریکی برابر است با:

$$\Delta U_E = -\Delta K \xrightarrow{\Delta K = 8 \text{ mJ} = 8 \times 10^{-3} \text{ J}} \Delta U_E = -8 \times 10^{-3} \text{ J}$$

اکنون که ΔU_E و $q = -4 \mu\text{C}$ معلوم‌اند، با استفاده از رابطه

$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}, \text{ اختلاف پتانسیل } V_B - V_A \text{ را حساب می‌کنیم. در این}$$

رابطه q را با علامت منفی جای‌گذاری می‌کنیم:

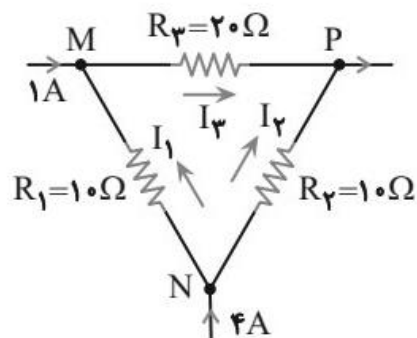
$$\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{\Delta U_E}{q} \xrightarrow{\Delta U_E = -8 \times 10^{-3} \text{ J}, q = -4 \times 10^{-6} \text{ C}}$$

$$\Rightarrow V_B - V_A = \frac{-8 \times 10^{-3}}{-4 \times 10^{-6}} = 2000 \text{ V} = 2 \text{ kV}$$

دقت کنید، اگر ΔU_E و یا q را بدون علامت در رابطه جای‌گذاری کنید به

گزینه اشتباه (۲) می‌رسید.

قبل از هر چیز می‌دانیم که اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه N و P و نیز اختلاف پتانسیل بین دو نقطه N و M به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$V_{PN} = R_2 I_2, \quad V_{MN} = R_1 I_1 \Rightarrow \frac{V_{PN}}{V_{MN}} = \frac{R_2 I_2}{R_1 I_1}$$

$$\xrightarrow{R_1=R_2=10\Omega} \frac{V_{PN}}{V_{MN}} = \frac{I_2}{I_1} \quad (1)$$

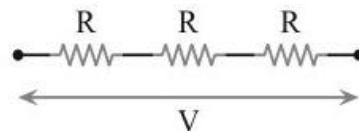
از طرفی با توجه به قاعدة انشعاب و حلقه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{M در گره: } I_1 + 1 = I_2 \\ \text{N در گره: } I_1 + I_2 = 4 \\ \text{P در گره: } I_2 + I_3 = 5 \\ \text{در حلقه: } -20 I_3 + 10 I_2 - 10 I_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 0.5 \text{ A} \\ I_2 = 3.5 \text{ A} \\ I_3 = 1.5 \text{ A} \end{cases}$$

و در نهایت داریم:

$$\frac{V_{PN}}{V_{MN}} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{3.5}{0.5} \Rightarrow \frac{V_{PN}}{V_{MN}} = 7$$

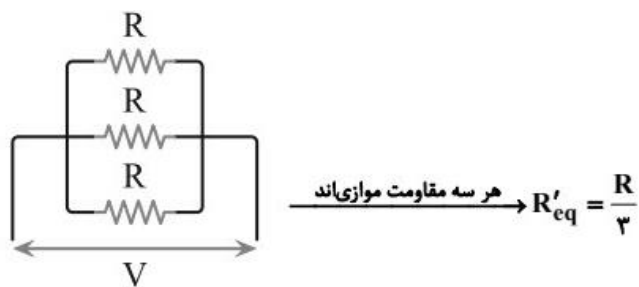
بار اول که ۳ مقاومت الکتریکی مشابه را به طور متوالی (مطابق شکل) به ولتاژ ثابت V وصل می‌کنیم، توان مصرفی مجموعه به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\xrightarrow{\text{هر سه مقاومت متوالی‌اند}} R_{eq} = 3R$$

$$P = \frac{V^2}{R_{eq}} \xrightarrow{P=90W} 90 = \frac{V^2}{3R} \Rightarrow \frac{V^2}{R} = 270W \quad (1)$$

حال اگر ۳ مقاومت مشابه حالت اول را به طور موازی به همان ولتاژ ثابت V وصل کنیم داریم:

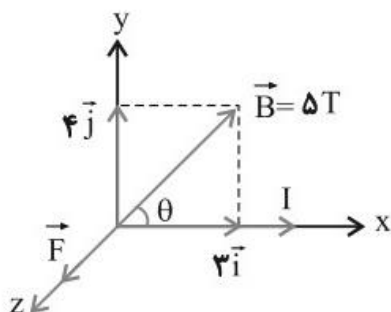


$$P' = \frac{V^2}{R_{eq}} \xrightarrow{R_{eq} = \frac{R}{3}} P' = \frac{V^2}{\frac{R}{3}} = \frac{3V^2}{R}$$

$$\Rightarrow P' = 3 \frac{V^2}{R} \xrightarrow{\frac{V^2}{R} = 270W} P' = 3 \times 270$$

$$\Rightarrow P' = 810W$$

در این مسئله میدان مغناطیسی برحسب بردارهای یک‌پاره داده شده، می‌خواهیم نیروی وارد بر سیم را بیابیم.



از $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$ ، بزرگی میدان را می‌یابیم و پس از یافتن θ از رابطه $F = I\ell B \sin \theta$ نیرو را حساب می‌کنیم.

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5T$$

برای یافتن θ بردار $\vec{B}$ را در دستگاه xoy رسم می‌کنیم و داریم:

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5}$$

بنابراین داریم:

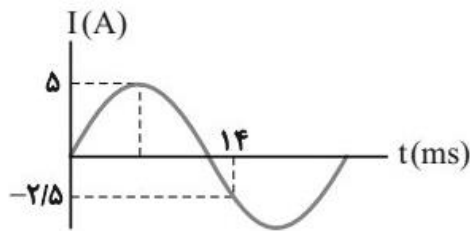
$$F = I\ell B \sin \theta \xrightarrow{I=5A, \ell=0.1m, B=5T, \sin \theta = \frac{4}{5}} F = 1W$$

$$R = \frac{5 \times 10^{-1} \times 4 \times 10^{-1} \times 4}{2} = 0.4 \Omega$$

۴- گزینه «ا»

ابتدا معادله جریان و سپس جریان در $t = 3 \text{ ms}$ را حساب می‌کنیم.

معادله کلی جریان از رابطه $I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t$ به دست می‌آید. با توجه به نمودار داریم:



$$I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{T} t = \frac{I}{I_m} \xrightarrow{I_m=5A, t=14s, I=-2/5A}$$

$$\sin \frac{2\pi \times 14}{T} = -\frac{1}{5} = \sin \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \frac{28\pi}{T} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow T = 24 \text{ ms}$$

بنابراین داریم:

$$I = 5 \sin \frac{2\pi}{24} t = 5 \sin \frac{\pi}{12} t$$

حال $t = 3 \text{ ms}$ را جایگزین می‌کنیم و داریم:

$$I = 5 \sin \frac{\pi}{12} \times 3 = 5 \sin \frac{\pi}{4} = 5 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ A}$$

در نهایت داریم:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 \xrightarrow{I = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ A}, L = 12 \text{ H}}$$

$$U = \frac{1}{2} \times 12 \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 6 \times \frac{25}{2} = 75 \text{ J}$$

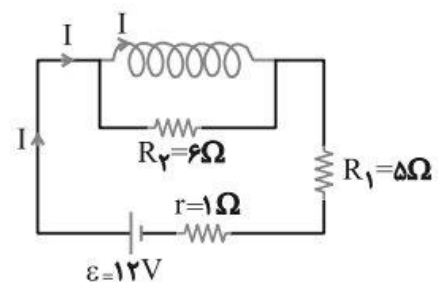
$$F = 5 \times 0.1 \times 5 \times \frac{4}{5} = 2 \text{ N}$$

۳۸- گزینه «۳»

مطابق شکل، سیملوله به مدار متصل است. برای محاسبه میدان مغناطیسی درون

سیملوله ابتدا جریان عبوری در سیملوله را می‌یابیم و از رابطه $B = \frac{\mu_0 N I}{\ell}$

میدان مغناطیسی آن را محاسبه می‌کنیم. حل مدار به صورت زیر است:



$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} = \frac{12}{5 + 1} = 2 \text{ A}$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \xrightarrow{N=500, I=2A, \ell=10 \text{ cm}=0.1 \text{ m}}$$

$$B = \frac{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 500 \times 2 \times 2}{0.1} = 120 \times 10^{-4} \text{ T} = 12 \text{ G}$$

۳۹- گزینه «ا»

برای یافتن R لازم است از رابطه $R = \frac{|\varepsilon|}{I}$ و برای $|\varepsilon|$ از رابطه

$|\varepsilon| = B \ell v$ استفاده کنیم. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} |\varepsilon| &= B \ell v \\ R &= \frac{|\varepsilon|}{I} \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = \frac{B \ell v}{I}$$

۴۴- گزینه «۳»

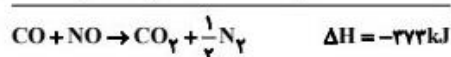
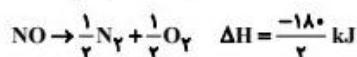
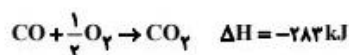
در قسمت افقی نمودار از چپ به راست تعداد اتم‌های کربن افزایش یافته است. پس در نمودار عمودی به جای X همه‌ی موارد به غیر از فرار بودن را می‌توان گذاشت؛ زیرا با افزایش تعداد اتم‌های کربن میزان فرار بودن ترکیب کاهش می‌یابد.

۴۵- گزینه «۲»

موارد اول و دوم به درستی بیان شده‌اند. بررسی سایر موارد: مورد سوم: از آن جایی که گرمای آزاد شده در واکنش (۲) مقدار بیشتری است، انتظار می‌رود که ΔH محیط نیز در اثر این واکنش مقدار بیشتری به خود اختصاص دهد. مورد چهارم: در شرایط یکسان از آن جایی که فرآورده‌های دو واکنش ماده‌ای یکسان است، پس از نظر پایداری نیز یکسان می‌باشند ولی قسمت متفاوت در این دو واکنش پایداری واکنش‌دهنده‌هاست که در واکنش (۱) بیش‌تر است.

۴۶- گزینه «۱»

برای این که آنتالپی واکنش موردنظر را به‌دست آوریم، طبق قانون هس واکنش I و $\frac{1}{2}$ واکنش II را باهم جمع می‌کنیم.



$$-373 = [1075 + 607] - [2(\text{C}=\text{O}) + \frac{1}{2}(944)]$$

$$\text{C}=\text{O} \text{ متوسط آنتالپی پیوند} = 791 / \text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

۴۱- گزینه «۱»

تنها مورد آ درست است.

بررسی موارد:

آ: عنصر مورد نظر قلع است که ویژگی‌های ذکر شده برای آن صحیح است.

ب: عنصر مورد نظر گوگرد است که رسانایی الکتریکی ندارد.

ج: عنصر مورد نظر سرب است که در اثر ضربه خرد نمی‌شود و شکل‌پذیر است.

د: عنصر مورد نظر سدیم است که رسانایی الکتریکی بالایی دارد.

۴۲- گزینه «۱»

در چنین شرایطی ابتدا مقدار نظری فراورده مورد نظر را به‌دست می‌آوریم سپس بقیه‌ی محاسبات را با توجه به آن انجام می‌دهیم.

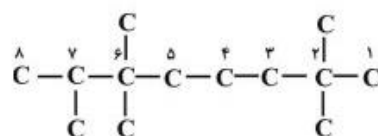
$$\text{Cu} \text{ مقدار نظری} = 2 / 64 \text{ g Cu} \times \frac{100}{60} = 3.125 \text{ g Cu}$$

$$? \text{ g CuO} = 3.125 / 64 \text{ g Cu} \times \frac{1 \text{ mol Cu}}{64 \text{ g Cu}} \times \frac{2 \text{ mol CuO}}{2 \text{ mol Cu}} \times \frac{80 \text{ g CuO}}{1 \text{ mol CuO}} \times \frac{100}{80}$$

$$= 2 \text{ g CuO}$$

۴۳- گزینه «۱»

فرمول ساختاری ترکیب مورد نظر، به صورت زیر است:



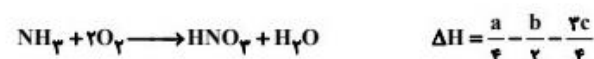
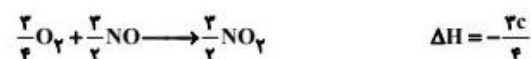
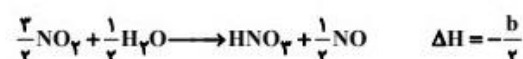
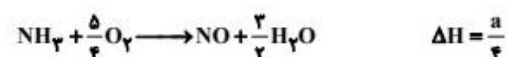
۲، ۲، ۶، ۷- پنتا متیل اوکتان

برای ساختن واکنش $\text{NH}_3 + 2\text{O}_2 \longrightarrow \text{HNO}_3 + \text{H}_2\text{O}$ باید واکنش اول را

با توجه به NH_3 در $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم، سپس واکنش دوم را با توجه

به HNO_3 در $-\frac{1}{4}$ ضرب می‌نماییم. واکنش سوم را نیز با توجه به

ضریب NO_2 در $-\frac{3}{4}$ ضرب خواهیم کرد. در نتیجه خواهیم داشت:



$$\Delta H = \frac{a - 2b - 3c}{4}$$

سرعت متوسط مصرف اوزون در بازه‌ی زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه برابر است با:

$$\bar{R}_{\text{O}_3} = -\frac{\Delta[\text{O}_3]}{\Delta t} = -\frac{(2/22 - 3/2) \times 10^{-5}}{10} \\ = 0.078 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

سرعت متوسط مصرف اوزون در بازه‌ی زمانی ۵۰ تا ۶۰ ثانیه نیز برابر است

با:

$$\bar{R}_{\text{O}_3} = -\frac{\Delta[\text{O}_3]}{\Delta t} = -\frac{(1/1 - 1/22) \times 10^{-5}}{10} \\ = 0.013 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

سرعت متوسط مصرف O_3 در بازه‌ی زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه

سرعت متوسط مصرف O_3 در بازه‌ی زمانی ۵۰ تا ۶۰ ثانیه

$$= \frac{0.078 \times 10^{-5}}{0.013 \times 10^{-5}} = 6$$

هر دو پلیمر جزو پلیمرهای سیر نشده هستند چون بعضی از اتم‌های کربن در

آنها پیوند دوگانه و سه‌گانه دارد. اتم‌های هیدروژن در ساختار آنها به

آرایش هشت‌تایی نرسیده‌اند.

A، پلی سیانو اتن و B، پلی استیرن است.

A، در ساخت پتو و B، در ساخت ظروف یکبار مصرف کاربرد دارد.

مونومر سازنده A، سیانواتن و B، استیرن است.

فقط عبارت (ب) درست است. در ساختار این ترکیب ۴ پیوند دوگانه وجود

دارد، پس می‌تواند در واکنش با هیدروژن، ۴ مولکول H_2 جذب کرده و به

ترکیب سیر شده تبدیل شود.

آ: فرمول مولکولی آن $\text{C}_{28}\text{H}_{44}\text{O}$ است.

پ: در این ترکیب بخش ناقطبی بر بخش قطبی غلبه دارد و در آب نامحلول

است، پس مصرف بیش از حد آن برای بدن ضرر دارد.

ت: گروه عاملی در ویتامین D، هیدروکسیل ($-\text{OH}$) و در ویتامین K،

